INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. În planul raportat la un reper cartezian (xOy) se consideră punctele $A(-3,1)$, $B(1,-1)$ şi $C(4,2)$.

a) Demonstrați că nu există nicio funcție al cărei grafic să fie reuniunea segmentelor $[AB]$ și $[AC]$.

b) Determinaţi funcţia al cărei grafic este reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

Soluţie.
a) O dreaptă verticală nu poate tăia graficul unei funcţii în mai multe puncte. În cazul nostru, axa Oy taie atât segmentul $[AB]$ cât şi segmentul $[AC]$. 3p

b) Domeniul funcţiei cerute este intervalul $[-3,4]$ 1p

Pe fiecare dintre intervalele $[-3,1]$ şi $[1,4]$ funcţia este liniară, deci legea sa de corespondenţă este de forma $f(x)=ax+b$. 1p

Obţinem $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x+1}{2}, & x\in[-3,1] \\ x-2, & x\in(1,4] \end{cases}$. 2p

2. Numerele $x\in(0,2\pi)$ şi $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ sunt astfel încât $\dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\sin 3x}{b}=\dfrac{\sin 5x}{c}$.

a) Dacă $x\neq\pi$, demonstraţi că $a\cdot(a+b+c)=b^2$.

b) Determinaţi numărul x, ştiind că a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluţie.
a) Pentru $x\neq\pi$, toate cele trei rapoarte din enunţ sunt nenule. 1p

Dacă $\dfrac{1}{k}, k\in\mathbb{R}^*$ este valoarea lor comună, atunci $a(a+b+c)=k^2\cdot\sin x\cdot(\sin x+\sin 5x+\sin 3x)=$
$=k^2\cdot\sin x\cdot(2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x)=k^2\cdot\sin 3x\cdot\sin x\cdot(2-4\sin^2 x+1)=k^2\cdot\sin 3x\cdot(3\sin x-4\sin^3 x)=$
$=k^2\cdot\sin^2 3x=b^2$. 3p

b) Avem soluţia $x=\pi$. 1p

Dacă $x\neq\pi$, atunci $b^2=a(a+b+c)=a\cdot 3b$, prin urmare $b=3a$. Rezultă că $\sin 3x=3\sin x$, de unde $\sin x=0$, contradicţie. 2p

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, având centrul cercului circumscris O şi centrul de greutate G. Dacă M este un punct oarecare din plan, definim punctul M' prin relaţia $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) Dacă M este situat pe cercul de rază R circumscris triunghiului ABC, arătaţi că punctul asociat M' aparţine cercului de centru A şi rază $2R$.

Soluţie.

a) $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GM} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) =$

$= 2\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = 2\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MG}$ 3p

b) Din relaţia de la punctul a), punctele M, G şi M' sunt coliniare, astfel încât $GM' = 2GM$.
.... 1p

O fiind mijlocul ipotenuzei BC, punctele A, G şi O sunt şi ele coliniare, cu $AG = 2GO$. 1p

Rezultă că triunghiurile AGM' şi OGM sunt asemenea. Deducem că $AM' = 2OM = 2R$ şi, de aici, concluzia problemei. 2p

4. O foaie de tablă are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m şi lăţimea de 4 m. Decupând această foaie obţinem, fără pierderi, cinci dreptunghiuri care constituie cele cinci feţe ale unui rezervor paralelipipedic fără capac. Determinaţi volumul acestui rezervor, ştiind că este maxim posibil.

Soluţie.

Fie x şi y dimensiunile bazei paralelipipedului, iar z înălţimea acestuia; atunci $xy + 2xz + 2yz = 48$ şi $V = xyz$ este maxim posibil. 2p

Din inegalitatea mediilor obţinem că $4V^2 = (xy)(2xz)(2yz) \le \left(\dfrac{xy + 2xz + 2yz}{3}\right)^3 = 16^3$, prin urmare $V \le 32$. 3p

În inegalitatea mediilor avem egalitate dacă şi numai dacă $xy = 2xz = 2yz = \dfrac{48}{3}$, adică atunci când $x = y = 4,\ z = 2$. Prin urmare, $V_{\max} = 32\ \text{m}^3$ se atinge dacă din foaia iniţială se taie un pătrat cu latura de 4 m şi patru dreptunghiuri cu lungimea de 4 m şi lăţimea de 2 m. 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Dacă z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, arătați că $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Soluţie.
Varianta I – metoda inducției matematice

Cum z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ 1p

$P(n): z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Etapa I: verificarea

$P(0): z^0+\frac{1}{z^0}=2\cos 0,$ adevărată

$P(1): z^1+\frac{1}{z^1}=2\cos\theta,$ adevărată 1p

Etapa II: demonstrația $P(1), P(k-1)$ și $P(k)\to P(k+1)$

$P(k-1): z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}=2\cos(k-1)\theta,\ P(k): z^k+\frac{1}{z^k}=2\cos k\theta,$

Arătăm că $z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=2\cos(k+1)\theta$ 1p

Din $z^k+\frac{1}{z^k}=2\cos k\theta$ și $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow \left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)=4\cos k\theta\cos\theta \Rightarrow$

$z^{k+1}+z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta \Rightarrow z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-\left(z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}\right)\Rightarrow$

$z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-2\cos(k-1)\theta$ 2p

$z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-2\cos k\theta\cos\theta-2\sin k\theta\sin\theta=2\cos k\theta\cos\theta-2\sin k\theta\sin\theta=$

$=2\cos(k+1)\theta.$ 1p

$P(0), P(1)$ adevărate, $P(1), P(k-1)$ și $P(k)\to P(k+1) \quad \forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow P(k)$ adevărată $\forall k\in\mathbb{N}$

.... 1p

Varianta a II a:

Cum z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ 1p

$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z\neq 0$, ecuația devine $z^2-2z\cos\theta+1=0$.

$\Delta=4\cos^2-4=-4\sin^2\theta \Rightarrow z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sin\theta}{2} \Leftrightarrow z_{1,2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ 2p

Dacă $z=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow z^n=\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n \underset{Moivre}{\Rightarrow} z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 1p

$\Rightarrow z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\frac{1}{\cos n\theta+i\sin n\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\frac{\cos n\theta-i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta}$ 1p

$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta=2\cos n\theta$ 1p

Similar se demonstrează pentru $z=\cos\theta-i\sin\theta$ 1p

2. Fie $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}$.

a) Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}$ este număr natural.

b) Arătați că pentru $\forall n\in\mathbb{N}, \exists p,q\in\mathbb{N}$ așa încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3}$, iar $3q^2=p^2-1$.

c) Demonstrați că $\left[A\right]$ este număr natural impar (unde $\left[A\right]$ reprezintă partea întreagă a lui A).

d) Demonstrați că $\frac{\left(\left[A\right]-1\right)\left(\left[A\right]+3\right)}{12}$ este pătrat perfect.

Soluție.

a) Se demonstrează folosind dezvoltarea binomului lui Newton 1p

b) Demonstrăm folosind metoda inducției matematice:

$P(n):\exists p,q\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3},\ p^2-1=3q^2$

Etapa I – verificare: $P(0):\left(2+\sqrt{3}\right)^0=1+0\sqrt{3},\ p=1, q=0,\ p^2-1=3q^2$ adevărat 1p

Etapa II – demonstrația: $P(k)\rightarrow P(k+1)$: $P(k):\exists p,q\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p+q\sqrt{3},\ p^2-1=3q^2$

Demonstrăm $P(k+1):\exists p',q'\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p'+q'\sqrt{3},\ p'^2-1=3q'^2$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^k\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(p+q\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=\underbrace{\left(2p+3q\right)}_{p'}+\sqrt{3}\underbrace{\left(p+2q\right)}_{q'}=p'+q'\sqrt{3}$

Demonstrăm că $p'^2-1=3q'^2,\ p',q'\in\mathbb{N}$ 1p

c) $A=p+q\sqrt{3},\ p,q\in\mathbb{N}$ și $p^2-1=3q^2 \Rightarrow \sqrt{3q^2}=\sqrt{p-1} \Rightarrow A=p+\sqrt{p^2-1}$ 1p

$p-1\leq\sqrt{p^2-1}<p\,\big|+p \Rightarrow 2p-1\leq p+\sqrt{p^2-1}<2p \Rightarrow \left[p+\sqrt{p^2-1}\right]=2p-1 \Rightarrow \left[A\right]=2p-1$,

$\Rightarrow \left[A\right]=2p-1$ este număr natural impar 1p

d) $\left[A\right]=2p-1,\ p\in\mathbb{N}\Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow \frac{\left(\left[A\right]-1\right)\cdot\left(\left[A\right]+3\right)}{12}=\frac{\left(2p-2\right)\left(2p+2\right)}{12}=\frac{2^2\left(p-1\right)\left(p+1\right)}{12}=\frac{p^2-1}{3}$

Dar $p^2-1=3q^2 \Rightarrow \frac{\left(\left[A\right]-1\right)\cdot\left(\left[A\right]+3\right)}{12}=q^2$ - pătrat perfect 1p

3. Rezolvați ecuația $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

Soluție.
Metoda I:
Condiții de existență a logaritmilor:
$x > 0, x \neq 1$ *și* $3x - 2 > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \setminus \{1\}$ 1p
Notăm $2^{\log_x(3x-2)} = a, a > 0$ și $3^{\log_x(3x-2)} = b, b > 0$.
Observăm că $6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 6^{\frac{1}{2}\log_x(3x-2)} = \sqrt{6^{\log_x(3x-2)}} = \sqrt{ab}$ 2p
Ecuația devine:$3a + 2b - 5\sqrt{ab} = 0, a, b > 0$.
Împărțind la $\sqrt{ab}$, ecuația devine $3\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - 5 = 0$ 1p
Folosind notația $\sqrt{\frac{a}{b}} = t, t > 0$, obținem ecuația $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0$, deci $3t^2 - 5t + 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{2}{3}$ 1p
Cum $\sqrt{\frac{a}{b}} = t$, vom avea $\frac{a}{b} = t^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = t^2$.
$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = 1$, deci $\log_x(3x-2) = 0$, dar asta conduce la $x = 1$, imposibil, din condițiile de existență 1p

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, deci $\log_x(3x-2) = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ și din condițiile de existență vom obține $x = 2$ 1p
Metoda a II-a:
condițiile de existență 1p
Ecuația $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$ poate fi scrisă sub forma
$3 \cdot 2^{2\log_{x^2}(3x-2)} + 2 \cdot 3^{2\log_{x^2}(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$, deci împărțind la $6^{\log_{x^2}(3x-2)} (> 0)$ obținem ecuația $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} - 5 = 0$ 2p
Dacă $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = t$, vom avea $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0, 3t^2 - 5t + 2 = 0$,cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{2}{3}$
.... 2p
Pentru $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = 1$, avem $\log_{x^2}(3x-2) = 0$, aceasta conducând la $x = 1$, imposibil, din condițiile de existență 1p
Pentru $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = \frac{2}{3}$, avem $\log_{x^2}(3x-2) = 1$ și $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ și din condițiile de existență vom obține $x = 2$ 1p

4. Avem *p* penare și *c* creioane. Dacă așezăm câte un creion în fiecare penar, rămân *n* creioane afară. Dacă așezăm câte *n* creioane în fiecare penar, rămân *n* penare goale. Câte creioane și câte penare avem ?

Soluție.
Așezăm câte un creion în fiecare penar, atunci rămân *n* creioane: $p + n = c$.
Așezăm câte *n* creioane în fiecare penar, avem *n* penare goale: $n \cdot (p - n) = c$ 1p

$p + n = n \cdot (p - n) \Rightarrow p + n = np - n^2 \Rightarrow p(n-1) = n + n^2 \Rightarrow p = \frac{n(n+1)}{n-1} \in \mathbb{N}$ 1p

$c = p + n = \frac{n(n+1)}{n-1} + n = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{n-1} \Rightarrow c = \frac{2n^2}{n-1} \in \mathbb{N}$ 1p

Cum $\left.\begin{array}{l} p \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)/(n^2+n) \Rightarrow (n-1)/(2n^2+2n) \\ c \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)/2n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (n-1)/2n \\ (n-1)/(2n-2) \end{array}\right\} \Rightarrow (n-1)/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n-1 \in \{1,2\} \Rightarrow n \in \{2,3\}$ 2p

Dacă $n=2 \Rightarrow p=\frac{2\cdot 3}{1}=6; \quad c=\frac{2\cdot 2^2}{2-1}=8$ 1p

Dacă $n=3 \Rightarrow p=\frac{3\cdot 4}{2}=6; \quad c=\frac{2\cdot 9}{2}=9$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane şi care au toate elemente din mulţimea $\{-1,1\}$.

a) Aflaţi cardinalul mulţimii $\mathcal{M}$.

b) Daţi exemplu de trei matrici $A, B, C \in \mathcal{M}$ astfel încât $\det A = 0, \det B = 4, \det C = -4$.

c) Demonstraţi că $\forall T \in \mathcal{M},$ atunci $\det T \in \{-4, 0, 4\}$.

d) Argumentaţi că, dacă $L \in \mathcal{M}$ atunci matricea L^{2016} are toate elementele nenule.

Soluţie.

a) $\text{card}\mathcal{M} = 2^9 = 512$ 2p

b) De exemplu:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = 0$ 1p

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \det B = 4$ 1p

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det C = -4$ 1p

c) Fie $T \in \mathcal{M}$. Atunci $-6 \le \det T \le 6$

Utilizând proprietăţile determinanţilor, $4 \mid \det T \Rightarrow \det T \in \{-4, 0, 4\}$ 1p

d) Matricea L^2 va avea numai elemente impare şi utilizând inducţia matematică obţinem că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ matricea L^n are doar elemente impare. În particular matricea L^{2016} are toate elementele numere impare, deci nenule. 1p

2. a) Fie punctele laticiale (adică puncte cu ambele coordonate numere întregi) $A(1,0); B(0,2);$ $C(2,3); D(4,2)$ şi $E(3,0)$. Calculaţi prin trei metode aria pentagonului $ABCDE$.

b) Demonstrați că nu există un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticiale.

(Se admite cunoscută teorema lui Pick: *Aria unui poligon* $\mathcal{P}$ *ale cărui vârfuri au coordonate întregi este egală cu* $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = i + \frac{f}{2} - 1$, *unde i reprezintă numărul punctelor laticiale din interiorul poligonului* $\mathcal{P}$, *respectiv f este numărul punctelor laticiale de pe frontiera lui* $\mathcal{P}$)

Soluţie.

a)

Metoda 1: $\text{Aria}(ABCDE) = \text{Aria}(ABC) + \text{Aria}(ACE) + \text{Aria}(CED) =$

$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{5}{2} + 3 + \frac{5}{2} = 8$ 2p

Metoda 2: Utilizăm teorema lui Pick: $\mathcal{A}_{ABCDE} = i + \frac{f}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$ 2p

Metoda 3: Fie $O(0,0); U(0,3); V(4,3); T(4,0)$;

$\text{Aria}(ABCD) = \text{Aria}(OUVT) - \text{Aria}(OAB) - \text{Aria}(UBC) - \text{Aria}(VDC) - \text{Aria}(DTE) =$

$= 4 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} = 8$ 2p

b) Presupunem prin reducere la absurd că ar exista un astfel de triunghi.

Pe de o parte din formula lui Pick obținem că aria unui astfel de triunghi este un număr rațional.

Pe de altă parte aria unui triunghi echilateral este $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, unde latura este de lungime *l*. Deoarece $l^2 \in \mathbb{N}^*$, obținem că aria triunghiului $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Contradicție. 1p

3. Se consideră sistemul: $\begin{cases} 2015x + 2016y + 2017z = \frac{1}{2}x \\ 2017x + 2015y + 2016z = \frac{1}{2}y \\ 2016x + 2017y + 2015z = \frac{1}{2}z \end{cases}$

a) Indicați o soluție a sistemului.

b) Demonstrați că sistemul are o unică soluție.

Soluţie.

a) Evident, avem soluția banală $(0,0,0)$ 2p

b)

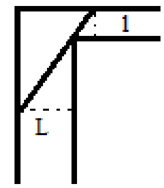
Determinantul matricei sistemului, $\det A = \begin{vmatrix} 2015 - \frac{1}{2} & 2016 & 2017 \\ 2017 & 2015 - \frac{1}{2} & 2016 \\ 2016 & 2017 & 2015 - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ 1p

$$\det A=\left(2015+2016+2017-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2017 & 2015-\frac{1}{2} & 2016\\ 2016 & 2017 & 2015-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$ 1p

Fiecare factor al produsului este nenul 2p

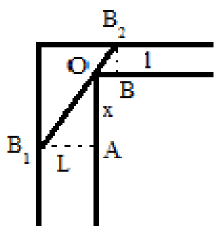
Din teorema lui Cramer rezultă că sistemul are doar soluția banală $(0,0,0)$ 1p

4. Dorel vrea să transporte o țeavă de cupru de lungime Λ (grosimea poate fi presupusă neglijabilă) care trebuie trecută dintr-un culoar de lățime L într-un culoar perpendicular pe primul, de lățime l (vezi desenul alăturat). Țeava trebuie să fie paralelă cu solul, în orice moment și nu poate fi îndoită.



Demonstrați că lungimea maximă a țevii pe care Dorel o poate transporta este $\Lambda_{\max}=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Soluție.



Fie $OA=x$. Lungimea maximă a țevii este minimul lungimii segmentului B_1B_2

$OB_1=\sqrt{L^2+x^2}$, $OB_2=\frac{l\cdot\sqrt{L^2+x^2}}{x}$ 1p

Trebuie aflat minimul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{L^2+x^2}+\frac{l}{x}\sqrt{L^2+x^2}$ 2p

$f'(x)=\frac{x^3-l\cdot L^2}{x^2\cdot\sqrt{L^2+x^2}}$ 1p

$f'(x)=0\Rightarrow x_0=\sqrt[3]{l\cdot L^2}$ și este abscisa punctului de minim 1p

$\Lambda_{\max}=f\left(\sqrt[3]{l\cdot L^2}\right)=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A -XII A

1. Să se rezolve in $\mathbb{Z}_6$ sistemul : $\begin{cases} x(y+z)=\hat{2} \\ y(x+z)=\hat{2} \\ z(x+y)=\hat{2} \end{cases}$

Soluție

Adunând ecuațiile avem: $\hat{2}(xy+yz+xz)=\hat{0} \Rightarrow xy+yz+xz \in \{\hat{0},\hat{3}\}$ 3p

Cazul I $xy+yz+zx=\hat{0} \Rightarrow xy=yz=xz=\hat{4}$ cu soluțiile:

$(\hat{2},\hat{2},\hat{2}),(\hat{5},\hat{2},\hat{2}),(\hat{2},\hat{5},\hat{2}),(\hat{2},\hat{2},\hat{5}),(\hat{4},\hat{4},\hat{4}),(\hat{1},\hat{4},\hat{4}),(\hat{4},\hat{1},\hat{4}),(\hat{4},\hat{4},\hat{1})$ 3p

Cazul II $xy+xz+yz=\hat{3} \Rightarrow xy=xz=yz=\hat{1}$ cu soluțiile $(\hat{1},\hat{1},\hat{1}),(\hat{5},\hat{5},\hat{5})$ 1p

2. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int\limits_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}\,dt$.

Soluţie

Funcţia $f:[x+3,2x+3]\to\mathbb{R}, f(t)=t\sqrt{t^3+9}$ este continuă 1p

Conform formulei Leibniz-Newton $\int\limits_{x+3}^{2x+3} f(t)\,dt = F(2x+3)-F(x+3)$, unde F este o primitivă a funcţiei f 1p

Folosim regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$ 1p

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(2x+3)-F(x+3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2F'(2x+3)-F'(x+3)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(2x+3)-f(x+3)\right)=f(3)=18$

.... 4p

3. Să se determine numerele reale m, p, q şi să se rezolve ecuaţiile $x^3-3x+m=0$, $x^4+px^2+qx+2=0$, ştiind ca au o soluţie dublă comună.

Soluţie

Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+m, g(x)=x^4+px^2+qx+2$ şi α soluţia dublă comună.

Atunci $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ și $g(\alpha)=g'(\alpha)=0$ 2p

$f'(\alpha)=0$ implică $\alpha=1$ sau $\alpha=-1$ 1p

Caz I Dacă $\alpha=1$ atunci $m=2$, $p=-1$, $q=-2$ 1p

Caz II Dacă $\alpha=-1$, atunci $m=-2$, $p=-1$, $q=2$ 1p

Rezolvarea completă a unei ecuații 1p

Rezolvarea completă a celeilalte ecuații 1p

4. Să se determine $n > 0$ astfel încât aria $S(n)$ a mulţimii cuprinse între reprezentarea grafică a funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-n\right|$, axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ să fie minimă.

Soluție

f este continuă şi nenegativă deci Γ_f are arie şi

$S(n)=Aria\left(\Gamma_f\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left|x^2-n\right|dx$ 1p

Cazul I: Dacă $\sqrt{n}\geq 1\Rightarrow S(n)=\int_0^1\left(n-x^2\right)dx=n-\frac{1}{3}\geq\frac{2}{3}$ 2p

Cazul II: Dacă $\sqrt{n}\in[0,1)\Rightarrow S(n)=\int_0^{\sqrt{n}}\left(-x^2+n\right)dx+\int_{\sqrt{n}}^1\left(x^2-n\right)dx=\frac{4n\sqrt{n}-3n+1}{3}$ 2p

$\sqrt{n}=t, g(t)=4t^3-3t^2+1$, t≥0 îşi atinge valoarea minimă $\frac{3}{4}$ pentru $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1}{4}$ 1p

Concluzia $n=\frac{1}{4}$ 1p